



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, Neamț

07.02.2026

Barem de notare și evaluare

Clasa a V-a

## Subiectul 1

Cifrele care alcătuiesc vârsta bunicului reprezintă vârstele celor doi nepoți. Dacă împărțim vârsta bunicului la suma vârstelor nepoților, se obține câtul 4 și restul 12. Aflați vârsta bunicului și vârstele nepoților.

**Soluție și barem:**

$\overline{ab} = 4 \cdot (a + b) + 12$ .....	3,5p
$10a + b = 4a + 4b + 12$ .....	4p
$6a = 3b + 12$ .....	4p
Cum $6a$ și $12$ sunt numere pare, deducem că $b$ este număr par.....	2p
Dacă $b = 2$ atunci $a = 3$ (fals).....	2p
Dacă $b = 4$ atunci $a = 4$ (fals).....	2p
Dacă $b = 6$ atunci $a = 5$ (fals).....	2p
Dacă $b = 8$ atunci $a = 6$ , deci bunicul are 68 de ani iar nepoții au 6 și 8 ani.....	3p

## Subiectul 2

Din produsul tuturor numerelor naturale de la 1 la 2026 se exclud toate numerele care se divid cu 5. Care este ultima cifră a produsului numerelor rămase?

**Soluție și barem:**

$P = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19) \cdot \dots \cdot (2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \cdot 2024 \cdot 2026)$ .....	5p
$u.c.(P) = u.c.[(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \dots \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6)]$ .....	5p
$u.c.(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) = 6$ .....	3,5p
$u.c.(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6) = 4$ .....	3p
$u.c.(6^n) = 6$ .....	3p
$u.c.(P) = u.c.(6^n \cdot 4) = 4$ .....	3p

## Subiectul 3

Determinați numerele naturale de trei cifre distincte, care sunt egale cu suma tuturor numerelor de câte două cifre distincte care se pot forma cu cifrele sale.

**Soluție și barem:**

Fie $\overline{abc}$ numărul căutat .Atunci are loc egalitatea: $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ca} + \overline{ac} + \overline{bc} + \overline{cb}$ .....	2,5p
$100a + 10b + c = 10a + b + 10b + a + 10c + a + 10a + c + 10b + c + 10c + b$ .....	2p
Obținem $78a = 12b + 21c$ adică $26a = 4b + 7c$ .....	2p
Cum $26a$ și $4b$ sunt numere pare, rezultă că $7c$ este par , adică $c$ este par.....	3p



Dacă  $c = 2$  rezultă  $13a = 2b + 7$ . Deci  $13a$  este impar, adică  $a$  este impar.

Obținem  $a = 1$  și  $b = 3$  .....3p

Dacă  $c = 4$  rezultă  $13a = 2b + 14$ . Deci  $13a$  este par, adică  $a$  este par.

Obținem  $a = 2$  și  $b = 6$  .....3p

Dacă  $c = 6$  rezultă  $13a = 2b + 21$ . Deci  $13a$  este impar, adică  $a$  este impar.

Obținem  $a = 3$  și  $b = 9$  .....3p

Dacă  $c = 8$  rezultă  $13a = 2b + 28$ . Deci  $13a$  este par, adică  $a$  este par.

Dar  $b \notin \square$  pentru orice  $a \in \{2, 4, 6, 8\}$  .....3p

Concluzie:  $\overline{abc} \in \{132, 264, 396\}$  .....1p

#### Subiectul 4

Se consideră mulțimea  $A = \{x^2 + y^2 + z^2 / x, y, z \in \square^*, x < y < z\}$ .

a) Verificați dacă  $45^{45} \in A$ .

b) Determinați un număr de forma  $n^n$  cu  $n \geq 2026$  care să fie element al mulțimii  $A$ .

c) Arătați că mulțimea  $A$  are o infinitate de elemente de forma  $n^n$ ,  $n \in \square^*$ .

#### Soluție și barem:

a)  $45^{45} = 45^{44} \cdot 45 = (45^{22})^2 \cdot (2^2 + 4^2 + 5^2) = (45^{22} \cdot 2)^2 + (45^{22} \cdot 4)^2 + (45^{22} \cdot 5)^2 \in A$  .....3,5p

b) Cum  $45^2 = 2025$  putem alege, de exemplu,  $n = 45^2 + 1^2 + 3^2 = 2035$  .....5p

$$2035^{2035} = 2035^{2034} \cdot 2035 = 2035^{2034} \cdot (1^2 + 3^2 + 45^2)$$

$$= (2035^{1017} \cdot 1)^2 + (2035^{1017} \cdot 3)^2 + (2035^{1017} \cdot 45)^2 \dots\dots\dots 4p$$

c) De exemplu,  $u.c.(4^k) \in \{4, 6\}$ ,  $u.c.(5^k) = 5$ ,  $u.c.(6^k) = 6$

deci  $(2^k)^2 + (5^k)^2 + (6^k)^2$  este impar pentru orice  $k \geq 1$  .....5p

Notăm  $(2^k)^2 + (5^k)^2 + (6^k)^2 = 2p + 1$  și atunci  $(2p + 1)^{2p+1} \in A$  pentru orice  $k \geq 1$  deoarece

$$(2p + 1)^{2p+1} = (2p + 1)^{2p} \cdot (2p + 1) = (2p + 1)^{2p} \cdot ((2^k)^2 + (5^k)^2 + (6^k)^2) =$$

$$= ((2p + 1)^p \cdot 2^k)^2 + ((2p + 1)^p \cdot 5^k)^2 + ((2p + 1)^p \cdot 6^k)^2 \in A \dots\dots\dots 5p$$